Différentiabilité de l'exponentielle matricielle

Théorème : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable en tout point et si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{d}_X \exp(H) = \exp(X) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_X(H))^k}{(k+1)!}$$

où on définit

$$\mathrm{ad}_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & XH - HX \end{array}.$$

Pour faire la preuve du théorème on admet que $\exp$ est $\mathcal{C}^2$ (elle est d'ailleurs $\mathcal{C}^\infty$ mais c'est toujours mieux de supposer le minimum nécessaire).

Preuve du théorème :

On commence par remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la série $\exp(tA)$ est normalement convergente. On pourra alors dériver/intégrer termes à termes autant que voulu dans la suite.

<u>Étape 1 : On résout deux équations différentielles qui nous serviront dans la suite</u>

On veut résoudre les équations suivantes, avec $H \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$:

$$\begin{cases} f' = A(f), & f(0) = A \quad (1) \\ g' = \exp(\cdot A)(H), & g(0) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

avec $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Soit f solution de (1). On a alors $(\exp(-tA)f(t))' = 0$ par hypothèse donc $\exp(-tA)f(t) = \exp(-0A)f(0) = f(0)$ d'où $f(t) = \exp(tA)(H)$. De plus, une fonction de cette forme est bien solution donc on les a toutes trouvées.

SI g est solution de (2), en intégrant termes à termes on remarque que $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}A^k}{(k+1)!}\right)(H)$ a la même dérivée que g. Comme ces deux fonctions coïncident en 0, elles sont égales ! On a alors toutes les solutions de (2) car Caucy-Lipschitz nous donne l'unicité.

<u>Étape 2 : Montrons que si $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(X)H\exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}_X)(H)$</u>

Soit $f : t \mapsto \exp(tX)H\exp(-tX)$ qui est dérivable par la remarque d'avant preuve. On a alors $f'(t) = Xf(t) - f(t)X = \mathrm{ad}_X(f(t))$. En prenant $A = \mathrm{ad}_X$, la résolution de (1) nous dit alors que $f(t) = \exp(t\mathrm{ad}_X)(H)$.

En prenant $t = 1$ il vient alors $\exp(X)H\exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}_X)(H)$.

Étape 3 : En posant $g(t) = \frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\, \exp(-tX)\exp(t(X+uH)$ on a

$$g'(t) = \exp(-t\mathrm{ad}_X(H)) \text{ et } g(0) = 0.$$

Le fait que $g(0) = 0$ est immédiat car on regarde alors la dérivée d'une fonction constante.

Notons $\varphi : (t,u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp(-tX)\exp(t(X+uH))$. Comme on a supposé $\exp$ $\mathcal{C}^2$, φ l'est aussi et on peut alors utiliser le théorème de Schwarz pour permuter les dérivées. On a alors

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\, \varphi(t,u)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\,(-\exp(-tX)X\exp(t(X+uH)) + \exp(-tX)(X+uH)\exp(t(X+uH))) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\,(u\exp(-tX)H\exp(t(X+uH))) \\
&= \exp(-tX)H\exp(tX)
\end{aligned}$$

Pour conclure on utilise le résultat de l'étape 2 en faisant le changement de variable $X = -tX$ (on utilise de manière sous-jacente que $\mathrm{ad}_X = -\mathrm{ad}_{-X}$).

Étape 4 : On conclut

D'une part on remarque que g est solution de (2) par l'étape 3 donc $g(1) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_X)^k}{(k+1)!}\right)(H)$.

D'autre part on a supposé $\exp$ différentiable en X. En posant $h : u \mapsto X + uH$, qui est dérivable, $\exp \circ h$ est encore différentiable. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\exp\circ h(u) &= (d_u(\exp\circ h))(1) \\
&= (d_{h(u)}(\exp)d_u(h))(1) \\
&= (d_{h(u)}(\exp)h'(u))(1) \\
&= (d_{h(u)}(\exp)(H))(1)
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\,|_{u=0}\, \exp(-X)\exp(X+uH) &= \exp(-X)(d_{h(0)}(\exp)H)(1) \\
&= \exp(-X)(d_X(\exp)(H))(1)
\end{aligned}$$

Ainsi $g(1) = \exp(-X)d_X(\exp)(H)$. En multipliant la première écriture de $g(1)$ par $\exp(X)$ on trouve le résultat voulu ! $\square$

Remarques importantes :

- Faites attention avec les passages entre dérivée et différentielle, j'ai essayé d'être rigoureux mais il est probable que je me sois emmêlé les pinceaux !

- Il faut être bien au clair avec les ensembles de définitions de nos fonctions qui ont tendance ici à être plus gros que ce dont on a l'habitude.
- On ne montre pas du tout ici que l'application $\exp$ est différentiable, on le suppose !!